Introduction aux sous-variétés aléatoires

Thomas Letendre (ENS de Lyon)

Lyon – 15 mars 2017

Géométrie aléatoire

(M, g) variété riemannienne, compacte, sans bord, de dimension n.
On choisit une sous-variété de codimension r de M “au hasard”.

Question

Que peut-on dire de sa géométrie (volume, courbure, ...) ou de sa topologie (nombre de composantes connexes, nombres de Betti, caractéristique d’Euler, ...) ?

On cherche une réponse statistique : moyenne, moments, loi, ...
ou un comportement presque sûr.

Polynômes de Kac

Sur $\mathbb{C}$, un polynôme de degré d a d racines, génériquement simples.

Question

Combien un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ a-t-il de racines réelles ?

Polynômes de Kac

Sur $\mathbb{C}$, un polynôme de degré d a d racines, génériquement simples.

Question

Combien un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ a-t-il de racines réelles ?

Théorème (Kac, 1943)

Soit $P_d = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ où les a_i sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (v.a.i.i.d.) gaussiennes centrées réduites. On a :

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{card}\left({P_d}^{-1}(0)\right)\right] \sim \frac{2}{\pi} \ln d,$$

quand $d \to +\infty$.

Sous-variétés aléatoires

Préliminaire : vecteurs gaussiens

$(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ euclidien de dimension N,
Λ opérateur auto-adjoint et défini positif.

Définition

Une variable aléatoire $X \in V$ est dite gaussienne, centrée, de variance Λ, si sa loi admet la densité :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\sqrt{\det(\Lambda)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle \Lambda^{-1}x\,, x\right\rangle\right)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $X \sim \mathcal{N}(0, \Lambda)$.

Si $\Lambda = \mathrm{Id}$ on dit que X est réduite. Alors, dans une base orthonormée (e_i), $X = \sum a_i e_i$, où les a_i sont des v.a.i.i.d réelles $\mathcal{N}(0, 1)$.

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

Notations

Soit $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$, on note :

- $|\alpha| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n$,
- $X^\alpha = X_0^{\alpha_0} \cdots X_n^{\alpha_n}$,
- $\alpha! = \alpha_0! \cdots \alpha_n!$,
- si $|\alpha| = d$, $\dbinom{d}{\alpha} = \dfrac{d!}{\alpha!}$.

On considère $P \in \mathbb{R}_d^{\mathrm{hom}}[X_0, \dots, X_n]$ aléatoire distribué selon la loi de Kostlan :

$$P = \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha \sqrt{\binom{d}{\alpha}} X^\alpha,$$

où les $(a_\alpha)_{|\alpha|=d}$ sont des v.a.i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

La famille $\left(\sqrt{\binom{d}{\alpha}}X^\alpha\right)_{|\alpha|=d}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0,\ldots,X_n]$ pour le produit scalaire :

$$\langle P\,,Q\rangle = \frac{1}{\pi^{n+1}d!}\int_{\mathbb{C}^{n+1}} P(z)\overline{Q(z)}e^{-\|z\|^2}\,\mathrm{d}z.$$

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

La famille $\left(\sqrt{\binom{d}{\alpha}}X^\alpha\right)_{|\alpha|=d}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_d^{\mathrm{hom}}[X_0,\dots,X_n]$ pour le produit scalaire :

$$\langle P\,,Q\rangle = \frac{1}{\pi^{n+1}d!}\int_{\mathbb{C}^{n+1}} P(z)\overline{Q(z)}e^{-\|z\|^2}\,\mathrm{d}z.$$

- Un polynôme de Kostlan–Shub–Smale est un vecteur aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,\mathrm{Id})$ dans $\mathbb{R}_d^{\mathrm{hom}}[X_0,\dots,X_n]$.
- La distribution de Kostlan est invariante sous l'action de $O_{n+1}(\mathbb{R})$ par précomposition.

Sous-variétés algébriques réelles aléatoires

On fixe d, n et $r \in \{1, \ldots, n\}$.

Définition

Soient $P_1, \ldots, P_r$ des polynômes de Kostlan–Shub–Smale indépendants dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \ldots, X_n]$, on note :

$$Z_d = \left(\bigcap P_i^{-1}(0) \right) \cap \mathbb{S}^n.$$

Lemme

Z_d est presque surement une sous-variété lisse de codimension r de $\mathbb{S}^n$.

Sous-variétés algébriques réelles aléatoires

On fixe d, n et $r \in \{1, \ldots, n\}$.

Définition

Soient $P_1, \ldots, P_r$ des polynômes de Kostlan–Shub–Smale indépendants dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \ldots, X_n]$, on note :

$$Z_d = \left(\bigcap {P_i}^{-1}(0) \right) \cap \mathbb{S}^n.$$

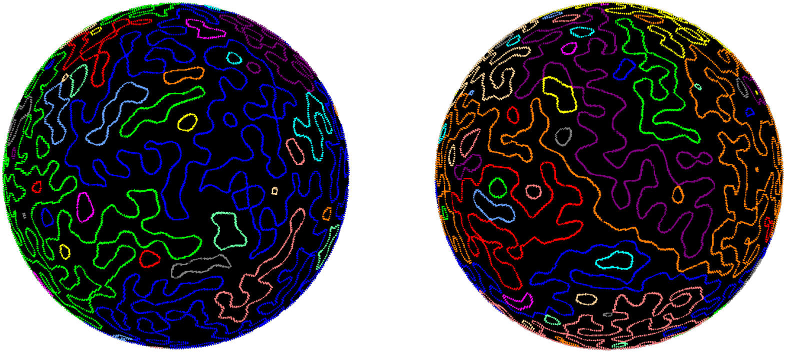
Lemme

Z_d est presque surement une sous-variété lisse de codimension r de $\mathbb{S}^n$.

Théorème (Kostlan, 1993)

Pour tout n, r et d, on a : $\mathbb{E}[\mathrm{Vol}\,(Z_d)] = d^{\frac{r}{2}}\,\mathrm{Vol}\,(\mathbb{S}^{n-r})$.

Courbes algébriques aléatoires



Courbes algébriques aléatoires de degré 56 sur la sphère, modèle de Kostlan–Shub–Smale.

Images par Maria Nastasescu (Brown University).

Sous-variétés nodales aléatoires

Soit (M, g) variété riemannienne compacte sans bord de dimension n.

La mesure riemannienne $|\mathrm{d}V_M|$ induit un produit scalaire L^2 sur $\mathcal{C}^\infty(M)$:

$$\langle f\,, g\rangle = \int_{x\in M} f(x)g(x)\,|\mathrm{d}V_M|\,.$$

Soit $\Delta : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ l'opérateur de Laplace–Beltrami.

Faits classiques

- On peut arranger les valeurs propres de Δ en une suite strictement croissante : $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \cdots$, et $\lambda_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$.
- Les espaces propres sont de dimensions finies.

Pour $\lambda \geqslant 0$, on note $V_\lambda = \bigoplus_{\lambda_k \leqslant \lambda} \ker(\Delta - \lambda_k \,\mathrm{Id})$.

Sous-variétés nodales aléatoires

On fixe $\lambda \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{1, \dots, n\}$.

Définition

Soient $f_1, \dots, f_r \in V_\lambda$ des v.a.i.i.d $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$, on note $Z_\lambda = \bigcap f_i^{-1}(0)$.
Z_λ est appelée sous-variété nodale aléatoire de codimension r.

Lemme

Z_λ est presque surement une sous-variété lisse de codimension r de M.

Sous-variétés nodales aléatoires

On fixe $\lambda \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{1, \dots, n\}$.

Définition

Soient $f_1, \dots, f_r \in V_\lambda$ des v.a.i.i.d $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$, on note $Z_\lambda = \bigcap f_i^{-1}(0)$.
Z_λ est appelée sous-variété nodale aléatoire de codimension r.

Lemme

Z_λ est presque surement une sous-variété lisse de codimension r de M.

Théorème (Bérard, 1985 – L., 2014)

Pour tout n, r on a :

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}\,(Z_\lambda)] \sim \left(\frac{\lambda}{n+2}\right)^{\frac{r}{2}} \mathrm{Vol}\,(M) \frac{\mathrm{Vol}\,(\mathbb{S}^{n-r})}{\mathrm{Vol}\,(\mathbb{S}^n)}$$

lorsque $\lambda \longrightarrow +\infty$.

Le cas du cercle $\mathbb{S}^1$ euclidien

On a $\Delta = -\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$, et les fonctions propres satisfont : $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \lambda\varphi = 0$.

- Les valeurs propres sont les k^2 avec $k \in \mathbb{N}$.
- L'espace propre associé à k^2 est engendré par $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$.
- V_λ est l'espace des polynômes trigonométriques de degré $\leqslant \sqrt{\lambda}$.
- Z_λ est l'ensemble des racines de :

$$f : \theta \longmapsto \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta),$$

où les a_k et b_k sont des v.a.i.i.d. réelles de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Le cas du cercle $\mathbb{S}^1$ euclidien

On a $\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$, et les fonctions propres satisfont : $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \lambda\varphi = 0$.

- Les valeurs propres sont les k^2 avec $k \in \mathbb{N}$.
- L'espace propre associé à k^2 est engendré par $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$.
- V_λ est l'espace des polynômes trigonométriques de degré $\leqslant \sqrt{\lambda}$.
- Z_λ est l'ensemble des racines de :

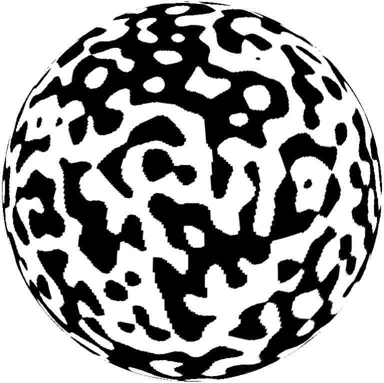
$$f : \theta \longmapsto \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta),$$

où les a_k et b_k sont des v.a.i.i.d. réelles de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Théorème (Bérard, 1985)

Lorsque $\lambda \longrightarrow +\infty$, $\qquad \mathbb{E}[\mathrm{card}(Z_\lambda)] \sim \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\lambda}.$

Courbes nodales aléatoires



Domaines nodaux aléatoires sur la sphère euclidienne, $\lambda = 1640$.

Image par Alex Barnett (Dartmouth College)

Variantes du cas nodal : harmoniques pures

On s'intéresse au lieu des zéros de $f \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$ dans $\widetilde{V}_k = \ker(\Delta - \lambda_k \mathrm{Id})$.
Intéressant si $\dim(\widetilde{V}_k)$ est assez grand (en pratique tend vers $+\infty$).

- Sur $\mathbb{S}^n$ euclidienne : harmoniques sphériques aléatoires.
- Sur $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$ plat : ondes aléatoires arithmétiques.
- Pas d'aléa sur une variété riemannienne générique.

Lemme

Sur $\mathbb{T}^n$ $(n \geqslant 5)$ ou $\mathbb{S}^n$, soient $r \leqslant n$ et $f_1, \ldots, f_r \in \widetilde{V}_k$ i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$, alors $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{r} f_i^{-1}(0)$ est p.s. une sous-variété lisse de codimension r.

Variantes du cas nodal

Modèle de bande passante

Sous-variétés aléatoires engendrées par $f \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$ dans :

$$V_{\ell,\lambda} = \bigoplus_{\lambda-\alpha(\lambda)\leqslant\lambda_k\leqslant\lambda} \ker\left(\Delta - \lambda_k \,\mathrm{Id}\right),$$

où $\dfrac{\alpha(\lambda)}{\lambda} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \ell \in [0,1]$ et $\dfrac{\alpha(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} +\infty$.

Variantes du cas nodal

Modèle de bande passante

Sous-variétés aléatoires engendrées par $f \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$ dans :

$$V_{\ell,\lambda} = \bigoplus_{\lambda - \alpha(\lambda) \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda} \ker\left(\Delta - \lambda_k \,\mathrm{Id}\right),$$

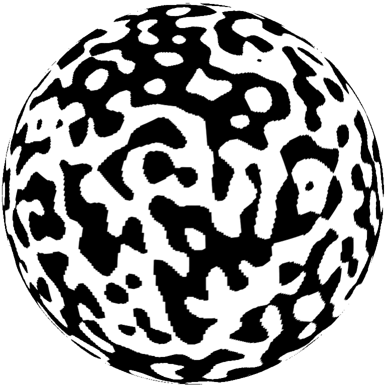
où $\dfrac{\alpha(\lambda)}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} \ell \in [0,1]$ et $\dfrac{\alpha(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} +\infty$.

Champ libre gaussien tronqué

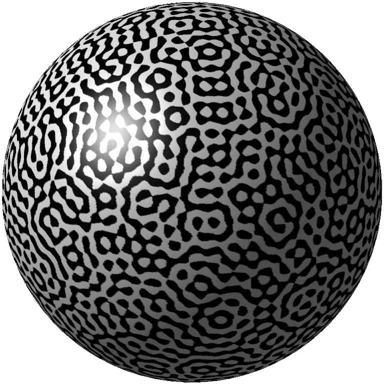
Sous-variétés aléatoires engendrées par $f \in \bigoplus_{0 < \lambda_k \leqslant \lambda} \ker\left(\Delta - \lambda_k \,\mathrm{Id}\right)$, gaussienne centrée réduite pour le produit scalaire :

$$\langle f \,, g \rangle = \int_{x \in M} \langle d_x f \,, d_x g \rangle \, |\mathrm{d}V_M| \,.$$

Bande large vs harmoniques pures



Modèle de bande large $[0, \lambda]$, avec $\lambda = 1640$.



Modèle d'harmoniques pures avec $\lambda = 6480$.

Images par Alex Barnett (Dartmouth College)

Quelques résultats

Quantités locales ou non-locales

On distingue deux types de quantités, étudiées par des méthodes différentes :

- les quantités locales (volume, caractéristique d'Euler, ...), ce sont les quantités pour lesquelles "on dispose d'une formule intégrale",
- les quantités non-locales (nombre de composantes connexes, nombre de Betti, ...).

Quantités locales ou non-locales

On distingue deux types de quantités, étudiées par des méthodes différentes :

- les quantités locales (volume, caractéristique d'Euler, ...), ce sont les quantités pour lesquelles "on dispose d'une formule intégrale",
- les quantités non-locales (nombre de composantes connexes, nombre de Betti, ...).

Théorème (L., 2014)

Soient $f_1, \dots, f_r \in V_\lambda$ des v.a.i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$, et $Z_\lambda = \bigcap f_i^{-1}(0)$. Si $n - r$ est pair, il existe $C_{n,r} > 0$, ne dépendant que de n et r, telle que lorsque $\lambda \to +\infty$:

$$\mathbb{E}[\chi(Z_\lambda)] \sim (-1)^{\frac{n-r}{2}} C_{n,r} \left(\frac{\lambda}{n+2}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{Vol}(M).$$

Variance de quantités locales

Théorème (Wigman, 2010)

Sur $\mathbb{S}^2$ *euclidienne, soit* $f_k \in \ker(\Delta - \lambda_k \,\mathrm{Id})$ *de loi* $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$. *Alors, lorsque* $k \to +\infty$,

$$\mathrm{Var}\left(\mathrm{Vol}\left({f_k}^{-1}(0)\right)\right) \sim \frac{1}{128\pi} \ln(k).$$

Remarque

Ici $\lambda_k = k(k+1)$ et $\mathbb{E}\left[\mathrm{Vol}\left({f_k}^{-1}(0)\right)\right]$ est d'ordre k (Bérard).

- Résultat du même genre sur le tore plat $\mathbb{T}^2$ pour des harmoniques pures (Krishnapur–Kurlberg–Wigman, 2013) ;
- Pour des sous-variétés algébriques de $\mathbb{S}^n$ de codimension $r < n$, $\mathrm{Var}(\mathrm{Vol}\,(Z_d))$ est d'ordre $d^{r-\frac{n}{2}}$ (L., 2016).

Théorèmes centraux limites

Théorème (Dalmao, 2015)

Soit Z_d *le lieu des zéros d'un polynôme de Kostlan–Shub–Smale de degré* d *dans* $\mathbb{S}^1$*. Alors il existe* $\sigma^2 > 0$ *explicite tel que :* $\mathrm{Var}(\mathrm{card}(Z_d)) \sim \sigma^2\sqrt{d}$*.*
De plus,

$$\frac{\mathrm{card}(Z_d) - \mathbb{E}[\mathrm{card}(Z_d)]}{\mathrm{Var}(\mathrm{card}(Z_d))} \xrightarrow[d\to+\infty]{loi} \mathcal{N}(0,1).$$

Même genre de résultats pour des sous-variétés de $\mathbb{T}^2$ plat, définies par des ondes arithmétiques aléatoires :

- longueur en codimension 1 (Marinucci–Peccati–Rossi–Wigman, 2016),
- cardinal en codimension 2 (Dalmao–Nourdin–Peccati–Rossi, 2016).

Topologie des hypersurfaces aléatoires

On considère une hypersurface nodale Z_λ dans M riemannienne compacte sans bord de dimension n.

Théorème (Gayet–Welschinger, 2015)

Soient Σ une hypersurface compacte sans bord de $\mathbb{R}^n$ et $R > 0$.
Il existe $C_{\Sigma,R} \geqslant 0$ telle que, pour tout λ assez grand, pour tout $x \in M$,

$$\mathbb{P}\left(Z_\lambda \cap B\left(x, \frac{R}{\sqrt{\lambda}}\right) \supset \Sigma' \text{ avec } \left(B\left(x, \frac{R}{\sqrt{\lambda}}\right), \Sigma'\right) \simeq (\mathbb{R}^n, \Sigma)\right) \geqslant C_{\Sigma,R}.$$

De plus, $C_{\Sigma,R} > 0$ pour R assez grand.

Topologie des hypersurfaces aléatoires

On note $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des types de difféomorphisme d'hypersurfaces connexes compactes sans bord de $\mathbb{R}^n$.

Soit Z une hypersurface de $\mathbb{S}^n$, on note $\mathcal{C}(Z)$ l'ensemble de ses composantes connexes et $b_0(Z)$ le cardinal de $\mathcal{C}(Z)$.

On définit une mesure de probabilité sur $\mathcal{H}_n$ par : $\mu_Z = \dfrac{1}{b_0(Z)} \displaystyle\sum_{c \in \mathcal{C}(Z)} \delta_{\overline{c}}$,

où $\overline{c}$ est le type de difféomorphisme de c.

Topologie des hypersurfaces aléatoires

Théorème (Sarnak–Wigman, 2015)

Soit Z_λ une hypersurface nodale aléatoire de $(\mathbb{S}^n, g)$, où g est quelconque. Il existe une mesure de probabilité μ_n sur $\mathcal{H}_n$, ne dépendant que de n, telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(\sup_{H \in \mathcal{H}_n} |\mu_{Z_\lambda}(H) - \mu_n(H)| > \varepsilon\right) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0.$$

De plus, $\mu_n(H) > 0$ pour tout $H \in \mathcal{H}_n$.

Espérance du volume

La fonction de corrélation

Une fonction aléatoire $f \in V_\lambda$ gaussienne centrée réduite, définit un processus gaussien centré $(f(x))_{x \in M}$.

Il est caractérisé par sa fonction de corrélation $e_\lambda : (x, y) \mapsto \mathbb{E}[f(x)f(y)]$.

Remarque

En dérivant sous l'intégrale, $\frac{\partial e_\lambda}{\partial x_i}(x, y) = \mathbb{E}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)f(y)\right]$.

La fonction de corrélation

La fonction e_λ est le noyau de la projection orthogonale $\Pi : L^2(M) \to V_\lambda$, c'est-à-dire que pour tout $\varphi \in L^2(M)$:

$$\forall x \in M, \qquad \Pi(\varphi)(x) = \int_{y \in M} e_\lambda(x,y)\varphi(y) \left|\mathrm{d}V_M\right|.$$

Sur le cercle $\mathbb{S}^1$ euclidien

V_λ est l'espace des polynômes trigonométriques de degré $\leqslant \lfloor \lambda \rfloor$,
e_λ est le noyau de Dirichlet :

$$e_\lambda(x,y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left((\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor + \frac{1}{2})(x-y)\right)}{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}.$$

Variété d'incidence

Soit $F_\lambda : V_\lambda \times M \to \mathbb{R}$, définie par $F_\lambda(f, x) = f(x)$ et $\Sigma_\lambda = {F_\lambda}^{-1}(0)$.

Lemme

Pour tout $\lambda \geqslant 0$, Σ_λ est une hypersurface lisse de $V_\lambda \times M$.

Démonstration.

Pour tout $(f, x) \in V_\lambda \times M$, $\partial_1 F_\lambda(f, x) : h \mapsto h(x)$ est surjective car V_λ contient les constantes. Donc F_λ est une submersion. □

Variété d'incidence

Soit $F_\lambda : V_\lambda \times M \to \mathbb{R}$, définie par $F_\lambda(f,x) = f(x)$ et $\Sigma_\lambda = {F_\lambda}^{-1}(0)$.

Lemme

Pour tout $\lambda \geqslant 0$, Σ_λ est une hypersurface lisse de $V_\lambda \times M$.

Démonstration.

Pour tout $(f,x) \in V_\lambda \times M$, $\partial_1 F_\lambda(f,x) : h \mapsto h(x)$ est surjective car V_λ contient les constantes. Donc F_λ est une submersion. $\square$

Les points critiques de $\pi_1 : \Sigma_\lambda \to V_\lambda$ sont les (f,x) tels que $d_x f = 0$. Ses valeurs critiques sont les f qui ne s'annulent pas transversalement.

Par le lemme de Sard, Z_λ est presque surement une hypersurface lisse.

Variété d'incidence

Soit $F_\lambda : V_\lambda \times M \to \mathbb{R}$, définie par $F_\lambda(f,x) = f(x)$ et $\Sigma_\lambda = {F_\lambda}^{-1}(0)$.

Lemme

Pour tout $\lambda \geqslant 0$, Σ_λ est une hypersurface lisse de $V_\lambda \times M$.

Démonstration.

Pour tout $(f,x) \in V_\lambda \times M$, $\partial_1 F_\lambda(f,x) : h \mapsto h(x)$ est surjective car V_λ contient les constantes. Donc F_λ est une submersion. □

Les points critiques de $\pi_1 : \Sigma_\lambda \to V_\lambda$ sont les (f,x) tels que $d_x f = 0$. Ses valeurs critiques sont les f qui ne s'annulent pas transversalement.

Par le lemme de Sard, Z_λ est presque surement une hypersurface lisse.

Remarque

Pour tout $x \in M$, $h \mapsto h(x)$ est surjective si et seulement si $e_\lambda(x,x) \neq 0$.

La formule de Kac–Rice

Théorème (formule de Kac–Rice)

Pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$, *on a :*

$$\mathbb{E}\left[\int_{x \in Z_\lambda} \phi(x) \left|\mathrm{d} V_{Z_\lambda}\right|\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in M} \phi(x) \frac{\mathbb{E}\left[\|d_x f\| \,\middle|\, f(x) = 0\right]}{\sqrt{e_\lambda(x,x)}} \left|\mathrm{d} V_M\right|.$$

La formule de Kac–Rice

Théorème (formule de Kac–Rice)

Pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$, on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_{x \in Z_\lambda} \phi(x) \left|\mathrm{d}V_{Z_\lambda}\right|\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in M} \phi(x) \frac{\mathbb{E}\left[\|d_x f\| \,\middle|\, f(x) = 0\right]}{\sqrt{e_\lambda(x,x)}} \left|\mathrm{d}V_M\right|.$$

On prend $\phi \equiv 1$. Il reste à estimer $\dfrac{\mathbb{E}\left[\|d_x f\| \,\middle|\, f(x) = 0\right]}{\sqrt{e_\lambda(x,x)}}$ à x fixé.

Calcul de l'espérance

Pour tout $x \in M$, $(f(x), d_x f)$ est un vecteur gaussien centré de variance

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} e_\lambda(x,x) & \partial_{y_1} e_\lambda(x,x) & \cdots & \partial_{y_n} e_\lambda(x,x) \\ \partial_{x_1} e_\lambda(x,x) & \partial_{x_1}\partial_{y_1} e_\lambda(x,x) & \cdots & \partial_{x_1}\partial_{y_n} e_\lambda(x,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n} e_\lambda(x,x) & \partial_{x_n}\partial_{y_1} e_\lambda(x,x) & \cdots & \partial_{x_n}\partial_{y_n} e_\lambda(x,x) \end{pmatrix}.$$

La loi conditionnelle de $d_x f$ sachant $f(x) = 0$ est une gaussienne centrée. Sa variance ne dépend que de e_λ et ses dérivées en (x, x).

Calcul de l'espérance

Pour tout $x \in M$, $(f(x), d_x f)$ est un vecteur gaussien centré de variance

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} e_\lambda(x,x) & \partial_{y_1} e_\lambda(x,x) & \cdots & \partial_{y_n} e_\lambda(x,x) \\ \partial_{x_1} e_\lambda(x,x) & \partial_{x_1}\partial_{y_1} e_\lambda(x,x) & \cdots & \partial_{x_1}\partial_{y_n} e_\lambda(x,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n} e_\lambda(x,x) & \partial_{x_n}\partial_{y_1} e_\lambda(x,x) & \cdots & \partial_{x_n}\partial_{y_n} e_\lambda(x,x) \end{pmatrix}.$$

La loi conditionnelle de $d_x f$ sachant $f(x) = 0$ est une gaussienne centrée. Sa variance ne dépend que de e_λ et ses dérivées en (x, x).

On montre que pour tout $x \in M$:

$$\frac{\mathbb{E}\left[\|d_x f\| \,\middle|\, f(x) = 0\right]}{\sqrt{e_\lambda(x,x)}} = \sqrt{\frac{\lambda}{n+2}} \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n}\right)} + O\left(1\right),$$

où le $O(1)$ est indépendant de x.

The end

Merci de votre attention.